11. Sierpinski carpet上の物理現象のユニバーサリティー(拡散に支配された凝集(DLA)およびその周辺の問題,研究会報告)

AUTHOR(S):

田口, 善弘

以上モデル過程における$A(\sigma)=1$前後の定性的なプロセスの違いは，発破によって誘発される微小破壊（ $b\sim1.18$ ）と群発活動した微小破壊（ $b\sim2.29\sim2.53$ ），[5] また大地震（ $b\sim1$ ）毎に観測された小破壊群（ $b\sim2.06\sim2.73$ ）[6] におけるb値のちがいを，ある程度説明出来るものと思われる。

文　献

1） 原　啓明，岡山誠司：物性研究，№.5，(1987)106.

2） 岡山誠司：一橋大学年報，自然科学25 6月号（1986） 3

3） H. Hara：Phys. Rev. B 15（1979)4062

4） 地震スペクトル解析では，相関関数は時間平均で計算する。小山順二：地震，26（1983）(1983)255

5） 飯尾能久：地震 36（1983)13，37（1984)109

6） 古本宗充：数理地震学(Ⅱ)（斉藤正徳編集，統計数理研）(1987)58

11.　Sierpinski carpet 上の物理現象のユニバーサリティー

東工大・理　　田　口　善　弘

マンデルブロの提唱したフラクタルの概念が「次元」という概念を拡張するであろうということは、高安秀樹氏の名著「フラクタル」にも述べられている通りである。本稿では、決定論的に作られる人工的なフラクタルのみに話を限り、この図形を格子と見なしてその格子上の物理現象を考える。そして、その物理現象のユニバーサリティー・クラスによって（必ずしもフラクタル次元のみにはよらずに）フラクタル図形を分類するという試みについて、筆者の知るところをレビューしよう。

現在では、物理現象のバルクとしてフラクタルを考えた場合、フラクタル格子のｒａｍｉｆｉｃａｔｉｏｎ　R[1] と呼ばれる量が非常に重要あることは間違いないと思われている。R は、「フラクタル格子から無限に大きいクラスターを切り取るのに必要な最小限の切断ボンド数」として定義される。Ｆｉｇ．１にR が有限であるフラクタル格子の例を示す。さて、ここで　ちょっと考えてみれば解るように、「無限に大きいクラスターを切り取るのに、有限個のボンドの切断しか必要としない格子」とは我々が良く知っている普通のｄ次元格子の中では、１次元の格子にのみ見られる特質である。（どんなに長い線分を切り取るのにも２ヶ所を切る必要しかない。）このため、R ：有限のフラクタル格子は、本質的に１次元的、つまり、「毛の生えた１次元系」の程度でしかないのではないかという予想が生じてくる。そしてこの予想は、「バルクとしてのフラクタル」を考えた場合にはかなり正しいらしいことが、解ってきた。

具体的な物理現象を考えよう。まず、フラクタル格子上での拡散過程を考える。$P(x, t)$を時刻 t の場所x に於けるランダム・ウォーカーの存在確率としよう。$t=0$ において、$P(x, 0)=\delta_{x,0}$という初期条件のもとに、拡散を生じさせた場合、普通のｄ次元格子では

$$P(O,\ t)\sim t^{-\frac{d}{2}} \tag{1}$$

という挙動を示すことがわかっている。さて、フラクタル次元d_fのフラクタル格子上ではどうなるか？

$$P(O,\ t)\sim t^{-\frac{df}{2}} \tag{2}$$

ならば、話は簡単なのだが、実際はそうならず$d_s \leqq d_f$なるスペクトル次元d_sにより

$$P(O,\ t)\sim t^{-\frac{ds}{2}} \tag{3}$$

となってしまう。このd_sについてHattori[2]らは最近、大部分のR ：有限の格子について$d_s \leqq 2$であることを示す一般的な証明を与えた。この事実と、（１）式を比較するとすぐ解るように、R ：有限のフラクタル格子は２次元格子を越えることが出来ない格子であることが解ろう。たとえ、$d_f=100$ であっても、R ：有限であれば、２次元格子を越えられないのである。これが、「毛の生えた一次元系」の意味である。

次に、フラクタル格子の格子点の位置にスピンを配置した最近接強磁性相互作用のn 成分スピン系の臨界現象を物理現象として考えてみよう。この物理現象について、普通のｄ次元の格子の場合に解っていることはスピン系の臨界現象が有限温度で生じるための条件が、ｎ＝１、つまりＩｓｉｎｇスピンなどの一成分スピンでは、ｄ＞１、ｎ≧２、つまり、ＸＹスピンなどの多成分スピンではｄ＞２であることである。さて、Hal Tasaki[3]によるつぎのようなｃｏｎｊｅｃｔｕがある。フラクタル格子が有限温度で相転移する条件は、

１．　１成分スピンについてはR ：無限大

２．　多成分スピンについては$d_s>2$

１．より、R ：有限のフラクタル格子上の一成分スピン系は相転移しない。R ：有限の系では、$d_s \leqq 2$であるから２．より、多成分スピン系も相転移しない。これと、普通のｄ次元格子の場合を比較するとR ：有限のフラクタル格子は普通の格子でいうと高々一次元にしか相当しないことになる。これもやはり、d_fがいくら大きくても「実際の」次元は大きくなったことにはならないということを示す結果である。もう一つ注目すべきことは、Tasakiのｃｏｎｊｅｃｔｕｒｅにはもはやフラクタル次元d_fは登場しないということである。フラクタル次元はある意味ではどうでも良くなってしまうのである。これが最初に述べた「フラクタル次元に必ずしもよらない分類」の意味なのである。

さて、以上のようにR ：有限の系でフラクタル次元d_fをいくら大きくしても何も面白くないということが解ったと思う。では、R ：無限大の系ではどうだろうか。この場合は以下で述べるように、フラクタル次元の増加にともなって、ちゃんと、一次元より大きい２次元、３次元に相当するような

物理現象が生じてくる。R ：無限大の格子の代表例としてシェルピンスキー・カーペットを考えよう。（Ｆｉｇ．２）このようなR ：無限大の格子の分類を考える場合に重要な量としてｃｏｎｎｅｃｔｉｖｉｔｙ Q[1]がある。Q は、「フラクタル格子から、r^{d_f}個の格子点よりなるクラスター切り出すのに必要な切断ボンド数の最低値がr^Q 」であるような量である。すぐ解るように、R ：有限のフラクタル格子では、Q ＝０となる。さて、我々は、R ：無限大のフラクタル格子としてシェルピンスキー・カーペットしか考えない代わりに、シェルピンスキー・カーペットを一般化していろいろなd_fやQ の値が取れるようにしよう。そのために次のようにする。$b\times b$個の小正方形よりなる正方形から、$l\times l$個の小正方形を切り取ることによりシェルピンスキー・カーペットを作るのである。（Ｆｉｇ．３）　Ｆｉｇ．２はb=3, l=1 の場合に当たる。こうするとb やl をかえることにより、

$$d_f=\frac{\ln(b^2-l^2)}{\ln b} \qquad (4a)$$

$$Q=\frac{\ln(b-l)}{\ln b} \qquad (4b)$$

なる好きなd_f, Qの値を持つシェルピンスキー・カーペットを作ることが出来る。しかも、Ｆｉｇ．３にあるようにd_f, Qは同じであるが、「違う形」を持った様々なシェルピンスキー・カーペットを作ることが出来るので、物理現象のユニバーサリティーに効いてくるのがどの様なパラメーターであるのかを知ることが出来る。

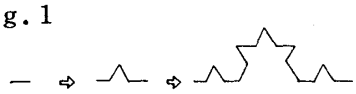
先ずは、スピン系の臨界現象を考えよう。Ｉｓｉｎｇモデルやｐｏｔｔｓモデルという一成分スピンに対する計算はいろいろあって、すべてＭｉｇｄａｌ近似[4]による計算である。それらの結果により解ったことは[5]、スピン系の臨界現象はd_f, Q及び、カーペットの一様性を記述するパラメーターL の３つが同じなら同じユニバーサリティー・クラスに属するということである。普通のｄ次元格子の場合の、次元ｄさえ同じなら同じユニバーサリティー・クラスに属してしまうという結果とは対称的である。更に、拡散過程についての計算もＭｉｇｄａｌ近似でなされたが，[4),6)]この場合のユニバーサリティー・クラス（同じd_sを持つということ）はd_fとQ のみによって決まることが解った。次元が同じなら、同じユニバーサリティー・クラスに属する、普通のｄ次元格子の場合とはやはり異なるのである。R ：無限大のフラクタル格子ではR ：有限のフラクタル格子の場合と異なり、d_fが「意味のある量」となる。しかし、その果たす役割は、普通のｄ次元格子の場合とは微妙に異なってくるのである。

以上のように、フラクタル格子を物理現象のバルクととらえて分類しようとすると、普通のｄ次元格子で「次元ｄ」が果たす役割を必ずしもフラクタル次元d_fが果たすとは限らないことが解ったと思う。ここで扱ったのは、スピン系の臨界現象と拡散過程だけであったが、その他にもいろいろな物理現象が考えられる。それら全てについて、ユニバーサリティーを考えるということは物理学の発展に取って決して無意味ではあるまい。フラクタルは元々「自然」を記述するために考え出された概念なのだから。

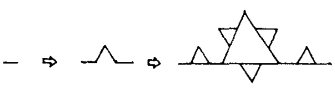
References

1) Mandelbrot B.B. 1982 *The Fractal Geometry of Nature* (Freeman, San Francisco).
2) Hattori K., Hattori T. and Watanabe H. 1986 Phys. Lett A115 207.
3) Tasaki H. 1986 Thesis University of Tokyo.
4) Gefen Y., Aharony A. and Mandelbrot B.B. 1984 J. Phys. A17 1277; Lin 1986 J. Phys. A19 3499; Riera and Chaves 1986 Z. Phys. B62 387; Hao and Yang 1987 J. Phys. A50 1627。
5) Taguchi Y. 1987 to be published in J. Phys. A.
6) Taguchi Y. 1988 to be published in J. Phys. A.

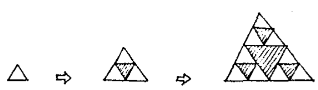
Fig. 1



(a)



(b)



(c)

Fig. 1　R：有限のフラクタル格子の例
(a)　Koch curve
(b)　枝分かれ Koch curve
(c)　Sierpinski　Gasket

Fig. 2

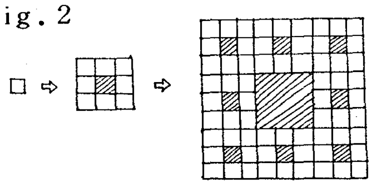


Fig. 2　R：無限大のフラクタル格子,
Sierpinski carpet

Fig. 3

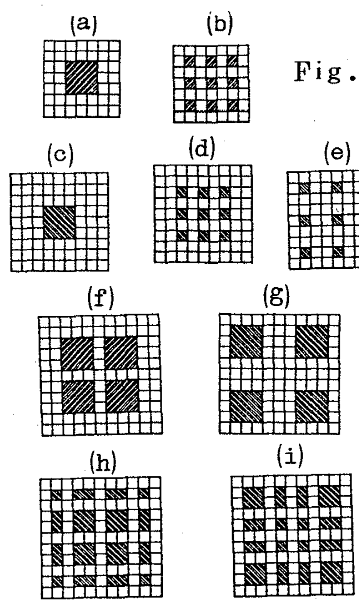


Fig. 3　一般化された　Sierpinski Carpet
(a), (b)：b＝7,　$\ell = 3$
(c), (d), (e)：b＝9,　$\ell = 3$
(f), (g), (h), (i)：b＝11,　$\ell = 6$

ユニバーサリティー・クラス
拡散過程；(a,b),(c,d,e),(f,g,h,i)
臨界現象；(a),(b),(c),(d,e),(f,g)
(h,i)
(括弧で囲われたものどうしが，同じユニバーサリティー・クラスに属する。)